ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 1º semestre EN 1ª parte do exame 18. 01. 19

1hora. (10 valores)

1. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional com função densidade conjunta dada por
$f(x,y)=x^2y$, $0<x<2$, $1/2<y<1$.
   a. Calcule $P(X<1,Y\geq 0.75)$ e calcule também $P(X<Y)$

$$P(X<1,Y\geq 0.75)=\int_{3/4}^{1}\int_{0}^{1}x^2y\,dx\,dy=\int_{3/4}^{1}y\left(\frac{x^3}{3}\right]_0^1 dy=\frac{1}{3}\left(\frac{y^2}{2}\right]_{3/4}^1=\frac{1}{6}\left(1-\frac{9}{16}\right)=\frac{7}{96}\approx 0.0729$$

$$P(X<Y)=\int_{0.5}^{1}\int_{0}^{y}x^2y\,dx\,dy=\int_{0.5}^{1}y\left(\frac{x^3}{3}\right]_0^y dy=\frac{1}{3}\int_{0.5}^{1}y^4\,dy=\frac{1}{3}\left(\frac{y^5}{5}\right]_{0.5}^1=\frac{1}{15}\left(1-0.5^5\right)=\frac{31}{15\times 32}\approx 0.0646$$

   b. Obtenha a função densidade marginal de Y e obtenha também a função densidade de X condicionada por $Y=3/4$.

$$f_Y(y)=\int_0^2 x^2y\,dx=y\left(\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8y}{3},\ 1/2<y<1$$

$$f_{X|Y=y}(x)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{x^2y}{8y/3}=\frac{3x^2}{8},\ 0<x<2,\ 1/2<y<1$$ (y fixo).

2. O número de multas passadas por um agente da EMEL segue um processo de Poisson com taxa média de 2 por hora.
   a. Qual a probabilidade de, num dia de trabalho de 7 horas, o agente passar menos de 10 multas?
   Seja Y o número de multas passadas por dia de trabalho $Y\sim Po(14)$
   $P(Y<10)=P(Y\leq 9)=0.1094$

   b. Numa semana de 5 dias de trabalho, qual a probabilidade de, no dia em que passou menos multas, o agente ter passado menos de 10?
   Y_i número de multas passadas no dia i

$$P(\min Y_i<10)=1-P(\min Y_i\geq 10)=1-P(Y\geq 10)^5=1-\left(1-P(Y<10)\right)^5=1-\left(1-0.1094\right)^5$$
$$=1-0.8906^5=1-0.5603=0.4397$$

   c. O agente acabou de passar uma multa. Qual a probabilidade de decorrerem mais de duas horas antes de ele passar a próxima multa?

   Z número de multas passadas em 2 horas $Z\sim Po(4)$

   $P(Z=0)=0.0183$

   Ou

   T tempo entre 2 multas consecutivas(em horas) $T\sim Ex(2)$

$$P(T>2)=\int_2^{\infty} 2\,e^{-2t}dt=\left(-e^{-2t}\right]_2^{\infty}=e^{-4}\approx 0.01832$$

3. A distância percorrida diariamente pelos agentes da EMEL, em km, pode ser modelada por uma distribuição normal de média 7.5 e desvio-padrão 2.5.
   a. Calcule a probabilidade de um agente percorrer menos de 10 km num dia. Recalcule esta probabilidade sabendo que ele percorreu mais de 5km.

   X distância percorrida diariamente pelo agente da EMEL (km) $\qquad X \sim n(7.5;2.5^2)$

   $$P(X<10)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{10-7.5}{2.5}\right)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<1\right)=0.8413$$

   $$P(X<10\,|\,X>5)=\frac{P(5<X<10)}{P(X>5)}=\frac{P\left(\frac{5-7.5}{2.5}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{10-7.5}{2.5}\right)}{P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{5-7.5}{2.5}\right)}=\frac{\Phi(1)-\Phi(-1)}{1-\Phi(-1)}=\frac{2\Phi(1)-1}{\Phi(1)}$$

   $$=\frac{2\times 0.8413-1}{0.8413}=\frac{0.6826}{0.8413}\approx 0.8114$$

   b. Selecionada uma amostra casual de 5 funcionários que se observou durante um dia de trabalho, qual a probabilidade de exatamente 2 funcionários percorrerem mais de 10.7 km.

   N número de funcionários (em 5) que percorrem mais de 10.7 km

   p probabilidade de um funcionário escolhido aleatoriamente percorrer mais de 10.7 km

   $N \sim b(5,p)$ com

   $$p=P(X>13.4)=1-\Phi\left(\frac{10.7-7.5}{2.5}\right)=1-\Phi\left(\frac{3.2}{2.5}\right)=1-\Phi\left(1.28\right)\approx 1-0.8997\approx 0.1$$

   $$P(N=2)=0.0729$$

4. Seja X uma população com distribuição exponencial de parâmetro λ da qual se extraiu uma amostra casual de dimensão n. Sendo $\mu=E(X)$, mostre que o valor de $P(\overline{X}<2\mu)$ não depende de λ e calcule o valor dessa probabilidade quando a amostra tem dimensão 8.

   $X_i \sim Ex(\lambda)$, X_i, X_j independentes para $i\neq j$ logo $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n,\lambda)$

   e portanto $2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i = 2\,\lambda\, n\,\overline{X} \sim \chi^2_{(2n)}$.

   Por outro lado $\mu=1/\lambda$ logo $P(\overline{X}<2\mu)=P(\overline{X}<2/\lambda)=P(2\lambda n\overline{X}<4n)$ e portanto, como a distribuição de $2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i = 2\,\lambda\, n\,\overline{X} \sim \chi^2_{(2n)}$ não depende de λ, o valor da probabilidade também não.

   Com $n=8$ vem $P(\overline{X}<2\mu)=P(2\lambda n\overline{X}<32)=0.99$